Anales PANEL'81/12 JAIIO
Sociedad Argentina de informática
e Investigación Operativa. Buenos Aires, 1981

ANALISE DE LOCALIZAÇÃO: USOS, MODELOS E TECNICAS DE SOLUÇÃO *

Paulo M. França

Departamento de Engenharia Eléctrica
Universidade Estadual de Campinas UNICAMP
Caixa Postal 1170 - DEE/FEC
Campinas - Basil.

RESUMO: Este artigo trata do problema de localizar facilidades da "melhor" maneira possível e reúne de maneira classificada os mais importantes resultados obtidos no campo da análise de localização. A intenção que norteia este trabalho é, através de uma revisão bibliográfica, fornecer um guia para a abordagem de problemas de localização que ocorrem nas mais diferentes áreas. É apresentada a motivação dos problemas de localização que aqui são divididos em dois grupos: os problemas contínuos e os discretos (localização em redes).

Com maior ênfase para o caso discreto são relacionados os principais resultados no se que refere à modelagem, técnicas de solução empregadas e eficiência computacional conseguidas nas últimas décadas. Especial atenção é dada aos problemas de localização de armazéns (warehouse/plant location problems) devido à sua grande aplicação em situações práticas.

1. INTRODUÇÃO

O problema de localização diz respeito a achar o "melhor" local para a instalação de alguma coisa. Tal tipo de problema é muito frequente em situações práticas, como localizar centrais telefônicas numa cidade, subestações em redes de energia elétrica, armazéns numa rede de distribuição, fábricas, escolas, postos de atendimento público, etc. Devido à grande dimensão e complexidadade dos sistemas produtivos modernos a análise matemática para auxiliar os processos de tomada de decisão tem se tornado quase um imperativo por causa dos elevados custos envolvidos. Assim, a análise de localização ganhou muita importância dentro da pesquisa operacional e tem recebido muitas contribuições devido ao esforço de pesquisa a ela dedicado, principalmente nesta última década.

* Este trabalho contou com o suporte do CNPq e das Telecomunicações Brasileiras S/A - TELEBRAS.

A preocupação matemática sobre decisões de localização é bem antiga. Este problema já aparecia no século XV com Cavalieri e posteriormente com Fagnano, Tedenat, Steiner e outros {33}. Fermat também é considerado o introdutor do problema e consta que Torricelli resolveu-o para o caso de três pontos (achar o ponto cuja soma das distâncias a 3 pontos dados é mínima). Mas, contemporaneamente foi Alfred Weber {94} quem formalizou o problema de localizar uma fábrica com o objetivo de minimizar os custos de transporte em relação a três pontos, dois fornecedores e um outro de consumo. Desde então muito se tem publicado no assunto, como pode ser atestado, por exemplo, pelo artigo de Francis e Goldstein {28} que relaciona 226 trabalhos numa tentativa de dar uma bibliografia relativa ao assunto. Outros artigos tipo "survey" foram feitos, como o exaustivo (273 páginas) trabalho de Lea {60}, ou Eilon et al. {20}, cap.2, Revelle et al. {80}, Scott {83}, Galvão {33}, e França {29}. Na mesma linha há trabalhos que procuram discutir uma classe particular de problemas como em McGinnis {71} que analisa e compara os problemas de localização que usam a técnica de solução MIP (mixed-integer programming) ou ainda El-Shaieb {24} que se ocupa só do problema de Weber simples.

Um problema de localização pode ser motivado de duas maneiras em relação ao objetivo a alcançar. A primeira quando quer-se tomar uma decisão de localização, procurando-se minimizar custos, por exemplo, de transportar mercadorias entre pontos de uma rede, custos de construir instalações na rede, ou ainda custos de armazenagem. Uma outra maneira se apresenta quando os custos ou benefícios são difíceis de quantificar e então procuram-se tomar decisões de localizar baseado em critérios de distância ou tempo mínimo. Os critérios de minimização de custos aparecem frequentemente em problemas que afetam o setor privado, como construção de fábricas, armazéns, entrepostos, onde os critérios de minimização de custos ou maximização de lucros são imperativos. Outros critérios que procuram retratar a maximização de alguma utilidade são mais comuns nos problemas que afetam o setor público {70}, como localizar escolas, hospitais, serviços públicos, bombeiros, etc.

A motivação de um problema de localização pode ainda ser visualizada quando consideramos, por exemplo, o caso de localizar armazéns numa rede de distribuição, onde intervêm custos de armazenagem do produto, custos de transporte e custos de construção dos armazéns. É intuitivo que quanto maior o número de armazéns na rede, menores os custos de distribuição e maiores os custos de construção e armazenagem. Na procura de uma solução de compromisso, encontra-se o número ideal de armazéns e sua localização. A Fig.1 mostra isso,

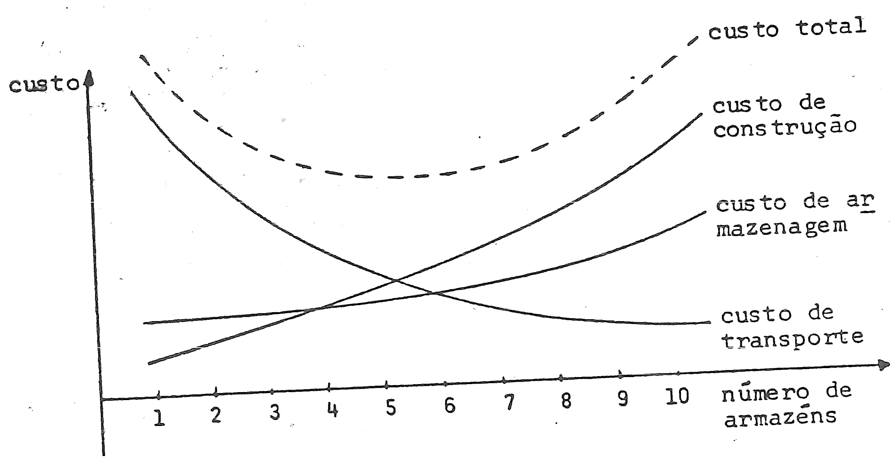

Fig. 1

onde N denota só os nós da rede e P compreende os nós ou pontos nos arcos ; p é o número de centros a localizar e δ a distância crítica, ou seja, a máxima distância permitida entre o centro de demanda e o ponto de serviço mais próximo. O símbolo δ^{-1} é usado para o problema inverso, ou seja, determinar o mínimo número de pontos de serviço de modo que todos os centros de demanda fiquem a uma distância de pelo menos δ, de no mínimo um ponto de serviço. T significa estarmos lidando com árvores; G caso contrário. Um problema seria então definido como, por exemplo, P/N/P/G, aliás, o mais clássico dos problemas minimax. Deve-se ressaltar que o problema acima, assim como todos os demais onde os pontos de serviço podem ser localizados em quaisquer locais da rede (nós e arcos), o espaço de soluções não é discreto mas sim o contínuo de pontos do grafo. Porém, manteremos tais casos dentro da classificação dos problemas discretos, por simplicidade.

O problema N/N/1/G foi introduzido e resolvido por Hakimi {43} e sua generalização para p centros, N/N/p/G, foi tratada por Toregas et al.{91}. Em Hakimi {43} também é introduzido e solucionado o problema P/N/1/G e a generalização para P/P/1/G foi feita por Frank {32}. A variedade P/N/1/G, também chamado do problema dos p-centros, foi proposta por Hakimi {44} e solucionado por Minieka {73}, Christofides e Viola {12}, Handler {48} e Garfinkel et al.{34}, entre outros. Em Handler {48} também são vistos os problemas P/P/p/G e N/P/p/G. Os algoritmos desenvolvidos nos trabalhos acima baseiam-se na solução sucessiva de uma série de problemas de recobrimento. Porém, no caso de árvores, algoritmos fundamentados na teoria de grafos mostram-se mais eficientes, como mostrado em Handler {49} para o caso de um único centro, em Handler {50} para o caso de p=2 (P/P/2/G e P/N/2/G) e Hakimi et al.{44} quando $p > 2$. Outros resultados que tratam com localizações em árvores foram conseguidos por Dearing e Francis {16}, Goldman {40} e Halfin {47}.

Há uma variante aos problemas minimax que trabalham com distâncias Euclidianas ou retilíneas. Nesses casos quer-se instalar, por exemplo, N novas facilidades entre N já existentes com o objetivo de minimizar a máxima distância Euclidiana ponderada entre todos os pontos de serviço. Um exemplo de aplicação desses problemas é quando se deseja instalar um certo número de radares para cobrir o tráfego de determinados aeroportos. Cada radar precisa estar o mais próximo de algum aeroporto para controlar seu tráfego e perto o suficiente de outro radar para que se tenha uma rede integrada de radares. Dearing e Francis {17}, Love et al. {63}, Wesolowsky {98}, Morris {75}, e Elzinga et al. {27} são alguns dos trabalhos nessa linha. Em geral os métodos usados são de programação não-linear (teoria de dualidade {27} e penalidade {63} ou programação linear {98},{75}).

3.2 - PROBLEMAS MINISOMA DE LOCALIZAÇÃO

Dentro do contexto de fluxos em redes, Baumol e Wolfe {5} foram os primeiros a formularem um problema de localização onde o objetivo era minimizar a soma total dos custos envolvidos. Este trabalho criou o problema conhecido como o <u>problema de localização de armazéns</u> (PLA) - ("plant", "warehouse" ou "facility location problem") onde concentrou-se grande parte do esforço da análise de localizações.

Dentre as múltiplas variações de formulação que esse problema sofreu, a introduzida por Hakimi {43},{44} foi particularmente importante pela atenção que despertou e pelo desenvolvimento que apresentou posteriormente. Tra-

Love {98}, Cabot et al. {11}, Pritsker e Ghare {77}, Sherali e Shetty {85} que se utilizam de técnicas primais e duais. Os dois últimos levam em conta a existência de fluxos entre pontos e satisfação de demandas dos consumidores.

Algumas extensões aos problemas contínuos de localização foram realizadas. Watson-Gandy e Eilon {93} estudaram o caso de funções-custo descontínuas. Em Drezner e Wesolowsky {18} é considerada a generalização de se localizar um ponto numa esfera usando diversas normas. O interessante trabalho de McGinnis e White {72} funde sob o enfoque multicritério as formulações clássicas de minisoma e minimax, que são discutidas na seção 3. Usando o conceito de restrição de risco, Seppala {84} desenvolveu um algoritmo para o caso em que as ponderações na distância são variáveis aleatórias. Cooper {14} também considera o caso estocástico.

3. PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DISCRETOS

Os problemas discretos supõem implicitamente a existência de uma rede para selecionar locais, porisso eles também são chamados de problemas de localização em redes. Verifica-se também que esses problemas têm recebido maior atenção e desenvolvimento.

Os problemas de localização discretos são caracterizados fundamentalmente por:

a. um espaço de soluções que consiste dos pontos de uma rede (podendo ser nós ou pontos nos arcos).

b. uma distância medida ao longo da rede, por exemplo:

d_{ij} = comprimento do caminho mínimo entre os nós i e j.

De acordo com a natureza da função objetivo, os problemas discretos se dividem em dois grupos:

* quando os pontos de serviço a serem localizados têm um caráter de atendimento de emergência, como hospitais ou bombeiros, etc., o objetivo mais racional é procurar localizá-los de modo a minimizar a maior distância que separa um ponto de demanda da rede do ponto de serviço mais próximo. Nesse caso tratamos os problemas minimax.

* quando procura-se localizar armazéns, centrais telefônicas, fábricas, escolas, etc., uma função objetivo mais apropriada é minimizar a distância total a ser percorrida para a satisfação da demanda. São os problemas minisoma. Estudaremos resumidamente alguns resultados alcançados em minimax e mais extensivamente em minisoma.

3.1 - PROBLEMAS MINIMAX DE LOCALIZAÇÃO

Há uma grande variedade de problemas minimax. Handler {48} propôs uma classificação para distinguir os diferentes modelos, composta de 4 caracteres:

- conjunto dos locais possíveis para localizar: N ou P.
- conjunto dos pontos de demanda: N ou P.
- número de centros a localizar ou máxima distância: p ou δ^{-1} (respectivamente).
- tipo da rede: T ou G.

onde ξ_j = fator que pondera o consumidor j

d_{ij} = distância entre fábrica i e consumidor j, definida por (1) ou (2).

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se o consumidor j é servido pela fábrica i} \\ 0 \text{ caso conrário} \end{cases}$$

Na ausência de restrições, tomam-se derivadas parciais para a obtenção da solução ótima:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}\ \xi_j (x_i - x_j)/d_{ij} = 0 \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}\ \xi_j (y_i - y_j)/d_{ij} = 0 \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

A solução das equações acima fornece

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} (z_{ij}\ \xi_j\ x_j/d_{ij})/(\sum_{j=1}^{m} z_{ij}\ \xi_j/d_{ij}) \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} (z_{ij}\ \xi_j\ y_j/d_{ij})/(\sum_{j=1}^{m} z_{ij}\ \xi_j/d_{ij}) \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

Essas equações podem ser resolvidas iterativamente. Seja k um índice que indica a iteração. Então,

$$y_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{m} (z_{ij}\ \xi_j\ x_j/d_{ij}^k)/\sum_{j=1}^{m} (z_{ij}\ \xi_j/d_{ij}^k) \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

$$y_i^{k+1} = \sum_{k=1}^{m} (z_{ij}\ \xi_j\ y_j/d_{ij}^k)\ /\sum_{j=1}^{m} (z_{ij}\ \xi_j/d_{ij}^k) \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

O procedimento termina quando $(x_i^{k+1} - x_i^k)$ e $(y_i^{k+1} - y_i^k)$ forem desprezíveis.

É demonstrado que este procedimento converge para uma única solução no caso que n=1, (veja, e.g., Kuhn e Kuenne {58} e El-Shaieb {24}) pois a função f(•) é convexa. No caso geral, (n > 1), apenas é garantido um ótimo local. Ostresh {76} discute a convergência desses métodos iterativos para o problema de Weber. Em {24} é sugerido o uso de métodos de busca para solução do caso (n=1) e é relatada uma experiência usando os métodos de Fibonacci e aproximação quadrática. Bellman {7} aplicou a programação dinâmica neste caso também sem alcançar muito sucesso. Há um conjunto de trabalhos que procuram tratar o problema geral (n > 1) sob o enfoque de programação linear. Entre outros, são conhecidos os trabalhos de Juel e Love {53}, Wesolowski e

Alguns artigos discutem objetivos a serem alcançados e traçam orientações metodológicas para a escolha de modelos, funções objetivos e técnicas para diferentes problemas de localização. Entre outros destacam-se os trabalhos de Geoffrion {36}, Rand {78}, Revelle et al. {80} e Beattie {6}.

Nas duas próximas secções será feito um esforço analítico no sentido de classificar os problemas de localização. Deve-se entretanto ressalvar que não se pode enquadrar todos os problemas e modelos nessa classificação ou qualquer outra, devido a existência de problemas combinados que escapam a qualquer rigidez que se queira impor à análise. Porém, num sentido amplo, há consenso sobre uma divisão dos problemas de localização em duas grandes categorias: os problemas contínuos e os discretos. Esta divisão arpesenta-se também com outros nomes, guardando porém a sua essência. Reconhecem-se, por exemplo, os problemas de localização no plano e em redes {80} ou ainda como problemas de localização com espaço infinito de soluções e espaço finito de soluções {33}.

2. PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO CONTÍNUOS

Os problemas contínuos caracterizam-se:

a. por procurar localizar pontos de serviços ("facilities") num espaço infinito de soluções (no plano, por exemplo) e não se restringe aos nós e arcos de uma rede.

b. por usar uma medida de distância de acordo com uma métrica particular.

A utilização de uma certa métrica serve para subdividir os problemas contínuos. Assim reconhecem-se os problemas com distância Euclidiana e os problemas com distância retilínea. Usando métrica Euclidiana define-se distância como:

$$d_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \tag{1}$$

onde d_{ij} = distância entre pontos i e j

(x_i, y_i) = coordenadas no ponto i, num sistema retangular

Nos problemas com distância retilínea (métrica das cidades), define-se:

$$d_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j| \tag{2}$$

Como já dito, foi A.Weber no começo do século quem examinou o problema de localizar uma fábrica para atender um mercado e dois fornecedores de matéria prima. Posteriormente, o problema de Weber foi generalizado para achar um ponto cuja soma das distâncias ponderadas a m pontos dados no plano seja mínima.

Este difícil problema foi solucionado, com métrica Euclidiana, pela primeira vez por Weiszfeld {95} em 1937, que usou um procedimento iterativo ainda hoje considerado um excelente algoritmo. Os trabalhos mais recentes de Kuhn e Kuenne {58} e Cooper {13} redescobriram este procedimento ao estender o problema para a localização de n pontos no plano (fábricas) para atender a m pontos dados (consumidores). Quer-se, então, formalmente

$$\text{minimizar } f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij}\, \xi_j\, d_{ij} \,.$$

Love {98}, Cabot et al. {11}, Pritsker e Ghare {77}, Sherali e Shetty {85} que se utilizam de técnicas primais e duais. Os dois últimos levam em conta a existência de fluxos entre pontos e satisfação de demandas dos consumidores.

Algumas extensões aos problemas contínuos de localização foram realizadas. Watson-Gandy e Eilon {93} estudaram o caso de funções-custo descontínuas. Em Drezner e Wesolowsky {18} é considerada a generalização de se localizar um ponto numa esfera usando diversas normas. O interessante trabalho de McGinnis e White {72} funde sob o enfoque multicritério as formulações clássicas de minisoma e minimax, que são discutidas na seção 3. Usando o conceito de restrição de risco, Seppala {84} desenvolveu um algoritmo para o caso em que as ponderações na distância são variáveis aleatórias. Cooper {14} também considera o caso estocástico.

3. PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DISCRETOS

Os problemas discretos supõem implicitamente a existência de uma rede para selecionar locais, porisso eles também são chamados de problemas de localização em redes. Verifica-se também que esses problemas que têm recebido maior atenção e desenvolvimento.

Os problemas de localização discretos são caracterizados fundamentalmente por:

a. um espaço de soluções que consiste dos pontos de uma rede (podendo ser nós ou pontos nos arcos).

b. uma distância medida ao longo da rede, por exemplo:

d_{ij} = comprimento do caminho mínimo entre os nós i e j.

De acordo com a natureza da função objetivo, os problemas discretos se dividem em dois grupos:

* quando os pontos de serviço a serem localizados têm um caráter de atendimento de emergência, como hospitais ou bombeiros, etc., o objetivo mais racional é procurar localizá-los de modo a minimizar a maior distância que separa um ponto de demanda da rede do ponto de serviço mais próximo. Nesse caso tratamos os <u>problemas minimax</u>.
* quando procura-se localizar armazéns, centrais telefônicas, fábricas, escolas, etc., uma função objetivo mais apropriada é minimizar a distância total a ser percorrida para a satisfação da demanda. São os problemas <u>minisoma</u>. Estudaremos resumidamente alguns resultados alcançados em minimax e mais extensivamente em minisoma.

3.1 - PROBLEMAS MINIMAX DE LOCALIZAÇÃO

Há uma grande variedade de problemas minimax. Handler {48} propôs uma classificação para distinguir os diferentes modelos, composta de 4 caracteres:

- conjunto dos locais possíveis para localizar: N ou P.
- conjunto dos pontos de demanda: N ou P.
- número de centros a localizar ou máxima distância: p ou δ^{-1} (respectivamente).
- tipo da rede: T ou G.

onde N denota só os nós da rede e P compreende os nós ou pontos nos arcos ; p é o número de centros a localizar e δ a distância crítica, ou seja, a máxima distância permitida entre um centro de demanda e o ponto de serviço mais próximo. O símbolo δ^{-1} é usado para o problema inverso, ou seja, determinar o mínimo número de pontos de serviço de modo que todos os centros de demanda fiquem a uma distância de pelo menos δ, de no mínimo um ponto de serviço. T significa estarmos lidando com árvores; G caso contrário. Um problema seria então definido como, por exemplo, P/N/P/G, aliás, o mais clássico dos problemas minimax. Deve-se ressaltar que o problema acima, assim como todos os demais onde os pontos de serviço podem ser localizados em quaisquer locais da rede (nós e arcos), o espaço de soluções não é discreto mas sim o contínuo de pontos do grafo. Porém, manteremos tais casos dentro da classificação dos problemas discretos, por simplicidade.

O problema N/N/1/G foi introduzido e resolvido por Hakimi {43} e sua generalização para p centros, N/N/p/G, foi tratada por Toregas et al.{91}. Em Hakimi {43} também é introduzido e solucionado o problema P/N/1/G e a generalização para P/P/1/G foi feita por Frank {32}. A variedade P/N/1/G, também chamado do problema dos p-centros, foi proposta por Hakimi {44} e solucionado por Minieka {73}, Christofides e Viola {12}, Handler {48} e Garfinkel et al.{34}, entre outros. Em Handler {48} também são vistos os problemas P/P/p/G e N/P/p/G. Os algoritmos desenvolvidos nos trabalhos acima baseiam-se na solução sucessiva de uma série de problemas de recobrimento. Porém, no caso de árvores, algoritmos fundamentados na teoria de grafos mostram-se mais eficientes, como mostrado em Handler {49} para o caso de um único centro, em Handler {50} para o caso de p=2 (P/P/2/G e P/N/2/G) e Hakimi et al.{44} quando $p > 2$. Outros resultados que tratam com localizações em árvores foram conseguidos por Dearing e Francis {16}, Goldman {40} e Halfin {47}.

Há uma variante aos problemas minimax que trabalham com distâncias Euclidianas ou retilíneas. Nesses casos quer-se instalar, por exemplo, N novas facilidades entre N já existentes com o objetivo de minimizar a máxima distância Euclidiana ponderada entre todos os pontos de serviço. Um exemplo de aplicação desses problemas é quando se deseja instalar um certo número de radares para cobrir o tráfego de determinados aeroportos. Cada radar precisa estar o mais próximo de algum aeroporto para controlar seu tráfego e perto o suficiente de outro radar para que se tenha uma rede integrada de radares. Dearing e Francis {17}, Love et al. {63}, Wesolowsky {98}, Morris {75}, e Elzinga et al. {27} são alguns dos trabalhos nessa linha. Em geral os métodos usados são de programação não-linear (teoria de dualidade {27} e penalidade {63} ou programação linear {98},{75}).

3.2 - PROBLEMAS MINISOMA DE LOCALIZAÇÃO

Dentro do contexto de fluxos em redes, Baumol e Wolfe {5} foram os primeiros a formularem um problema de localização onde o objetivo era minimizar a soma total dos custos envolvidos. Este trabalho criou o problema conhecido como o <u>problema de localização de armazéns</u> (PLA) - ("plant". "warehouse" ou "facility location problem") onde concentrou-se grande parte do esforço da análise de localizações.

Dentre as múltiplas variações de formulação que esse problema sofreu, a introduzida por Hakimi {43},{44} foi particularmente importante pela atenção que despertou e pelo desenvolvimento que apresentou posteriormente. Tra ta-se do problema das p-medianas ou p-centros*. Esta formulação não trabalha com os fluxos das mercadorias, e ao contrário do PLA, inclui como possíveis pontos de localização toda a rede considerada, ou seja, nós e arcos. Nos ocuparemos brevemente dos problemas das p-medianas e a seguir será feito um levantamento do estado atual de desenvolvimento dos PLA.

3.2.1 - Problema das p-medianas

O problema das p-medianas é um problema de localização minisoma que procura localizar um certo número (p) de pontos de serviço numa rede, tal que a soma das mínimas distâncias de cada nó da rede ao mais próximo ponto de serviço seja minimizada.

Seja um grafo conexo, não ordenado, $G=(N,A)$ onde N é o conjunto dos k nós e A o de arcos. Define-se um ponto do grafo G, a qualquer ponto situado sobre G, sendo um nó ou não. O comprimento do caminho mínimo entre dois pontos x e y é definido por $d(x,y)$, a distância entre x e y. Seja $X_p=\{x_1,x_2,\ldots,x_p\}$ um conjunto de p pontos que devem ser localizados em G e define-se para cada $1 \leqslant i \leqslant k$

$$d(n_i,X_p) = \min\{d(n_i,x_1)\ ,\ d(n_i,x_2)\ ,\ldots,\ d(n_i,x_p)\}\ ,$$

que é a mínima distância de n_i ao mais próximo ponto de X_p. Se $w(n_i).d(n_i,X_p)$ é o custo de satisfazer a demanda do nó n_i então

$$f(X_p) = \sum_{i=1}^{k} w(n_i).d(n_i,X_p)$$

é o custo de satisfazer todas as demandas, assumindo que os p pontos de serviço estão localizados em G, correspondem a X_p e que não existem restrições nos seus tamanhos. Os locais ótimos de instalação correspondem aos pontos X_p^* em G tal que

$$f(X_p^*) \leqslant f(X_p) \quad \text{para todo } X_p \text{ em } G.$$

Esse é um problema muito complexo para resolver. A fim de mostrar os resultados teóricos que permitem solucioná-los, vamos simplificar a formulação. Suponha o caso onde $k=1$. Deve-se achar, então, um ponto y^* em G tal que $f(y^*) \leqslant f(y)$, para todo y em G. Goldstein provou que no caso de G ser uma árvore, y^* estará sempre sobre um nó. Hakimi {43} generalizou este resultado para G, ao provar o teorema abaixo.

Teorema 1 - Há pelo menos um nó de $G = (N,A)$ para o qual $f(n) \leqslant f(y)$ para qualquer y em G.

Posteriormente, Hakimi {44} generalizou o teorema 1 para o caso de $k = p \geqslant 1$.

Teorema 2 - Há pelo menos um subconjunto $X_p \subset N$ contendo p nós, tal que $f(X_p) \leqslant f(Y_p)$ para qualquer conjunto Y_p de p pontos situados em nós ou arcos de G.

* Em geral, o problema dos p-centros é identificado como um problema minimax, ficando a denominação p-medianas para os problemas minisoma, mas esse rigor nem sempre é observado pelos autores.

O importante resultado desses teoremas diz, em outras palavras, que a procura das soluções ótimas do problema dos p-medianas pode ficar restrita aos nós da rede.

Esses resultados foram ainda ampliados por Levy {62} que provou serem válidos os teoremas 1 e 2 no caso de custos côncavos e por Goldman {41} que mostrou também a aplicação dos teoremas 1 e 2 no caso de um nó ser ponto de demanda e/ou de oferta. Hakimi e Maheshwari {45} e Wendell e Hurter {96}provaram a validade dos teoremas mesmo quando estão presentes restrições de capacidade nos arcos e mesmo restriçoes de tamanho dos centros, desde que se permita localizar mais de um centro num nó.

Quanto aos métodos de soluçao para o problema das p-medianas distinguem-se:

**algoritmos heirísticos; Maranzana {67}, Teitz e Bart {90}.

**algoritmos de separação e avaliação (branch-and-bound).

Entre outros, citam-se os trabalhos de El-Shaieb {25} e Järvinem et al. {51}.

**algoritmos baseados na programação linear.

Um enfoque é formular o problema como programação inteira e solucioná-lo por relaxação. Os problemas relaxados são de programação linear e algoritmos foram desenvolvidos por Revelle e Swain {81}, Garfinkel et al. {35}.O enfoque de Marsten {70} usa dualidade e programação paramétrica para propor um interessante algoritmo. Para uma discussão aprofundada de modelos e métodos do problema das p-medianas, veja o trabalho de Galvão {33}.

3.2.2 - Problema de Localização de Armazéns (PLA)

Foram os problemas de localização de armazéns que há vinte anos atrás deram início ao rápido desenvolvimento contemporâneo da análise de localizações. O problema, que parece ter sido proposto inicialmente por Baumol e Wolfe {5}, teve sua formulaçao inspirada no clássico problema de transporte da programaçao linear. Apesar de na formulação original os autores tratarem especificamente do caso de localização de armazéns, o problema estendeu-se para localização de fábricas e depois, mais genericamente, para "facilidades".

O problema pode ser encarado como encontrar locais ótimos para instalação de armazéns (fábricas, etc) dentro um número finito de locais candidatos e de modo a satisfazer a demanda de centros consumidores, procurando minimizar os custos envolvidos (transporte, estocagem, operação, construção , etc).

O que caracteriza fundamentalmente os PLA são o tipo de sua função objetivo e a presença ou não de restrições de capacidade. Em geral os problemas supõem função objetivo linear (custos de transporte) com custo fixo de instalação. Esses modelos serão analisados na próxima secção. O caso de funções não-lineares (custos côncavos ou lineares por partes) são estudados na secção 5.4. Os PLA sofrem outras caracterizações, como a presença ou não de centros intermediários (secção 5.2), se é considerado um só produto ou vários (secção 5.2) e ainda se a demanda é sazonal (secção 5.3) ou então se ela é estocástica (secção 5.1).

4. PRINCIPAIS MODELOS E TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DOS PLA

Em relação ao modelamento, distinguem-se duas formulações gerais, os modelos com capacidade ilimitada e os com capacidade restrita. Em relação às técnicas usadas na solução dos problemas reconhecem-se três grupos:

* métodos heurísticos
* algoritmos de separação e avaliação
* enfoque de programação mista e decomposição.

4.1 - MÉTODOS HEURÍSTICOS

A preocupação de se desenvolver métodos heurísticos para resolver os PLA se deve à dificuldade computacional inerente a resolver de maneira ótima (exata) tais problemas. Os algoritmos heurísticos contentam-se com soluções boas (não-ótimas) e sua utilização precisa ser precedida de uma análise do que se quer retirar dos resultados da otimização do sistema. Em alguns casos práticos, a utilização de tais métodos impossibilita respostas à perguntas importantes, como análise de sensibilidade, prioridades de implementação, etc {36}. Além disso, o aparecimento de métodos exatos de otimização, poderosos e eficientes, permite resolver mesmo problemas de grandes dimensões sem necessidade de lançar mão de heurísticas. Uma exposição da filosofia do enfoque heurístico é encontrada em Kuehn e Hamburger {57}.

Um significante esforço, porém, foi dedicado aos algoritmos heurísticos. Um dos primeiros algoritmos bem sucedidos foi o de Kuehn e Hamburger {57}. Eles dividem sua heurística em duas partes: Na primeira, um programa principal localiza armazéns, um de cada vez, até que nenhum mais possa ser colocado na rede sem que aumente o custo total. Depois, uma outra rotina tenta modificar a solução do programa principal, trocando ou tirando armazéns de modo a melhorar a soluçao atual. Feldman et al. {28} propuseram uma heurística semelhante, e consideram economias de escala, assim como o trabalho de Manne {66}. Outros métodos heurísticos foram propostos por Sá {82}, Marks e Liebman {69}. O já citado pioneiro trabalho de Baumol e Wolfe {5} sugere um algoritmo heurístico para encontrar boas soluções de um problema com função objeto côncava (custo de armazenagem côncavo) e restrições sobre a capacidade dos armazéns. Trabalhos aplicados ou estudo de casos sugerem heurísticas apropriadas (e.g. Burstall et al. {10}, Lawrence e Pengilly {59}, Monterosso {74}, e Silva e Lins {86}.

4.2 - ALGORITMOS DE SEPARAÇÃO E AVALIAÇÃO - (BRANCH-AND-BOUND)

A técnica de separação e avaliação, em geral, se aplica bem aos modelos mais simples dos PLA, ou seja, modelos com um único produto, custos lineares de transporte e operação e um único estágio de distribuição (fábrica-armazém ou armazém-consumidor). Aqui só relataremos os principais algoritmos propostos em separação e avaliação especificamente endereçados a esses problemas mais simples, visto que os problemas com vários produtos e dois estágios são analisados em 5.2 e os custos não-lineares em 5.4.

O primeiro algoritmo exato proposto para resolver o PLA foi o de separação e avaliação de Efroymson e Ray {19}. O modelo deles é sem restrição de capacidade e é a generalização de um modelo mais simples devido a Balinsky {3}. O problema formulado é

$$\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} k_i z_i$$

sujeito a $\sum_{i \in N_j} x_{ij} = 1$, $j=1,2,\ldots,n$,

$0 \leqslant \sum_{j \in P_i} x_{ij} \leqslant n_i z_i$, $i=1,2,\ldots,m$,

, $z_i=0,1$

onde $c_{ij} = t_{ij} \cdot D_j$

t_{ij} = custo unitário de transporte do armazém i ao consumidor j

D_j = demanda do consumidor j

k_i = custo fixo de instalação do armazém i

z_i = 1 se o armazém for instalado em i; 0 caso contrário

x_{ij} = fração da demanda do consumidor j que é suprida pelo armazém i

m = número de possíveis locais dos armazéns

n = número de centros consumidores

P_i = conjunto de consumidores que são supridos pelo armazém i

n_i = número de elementos de P_i

N_j = conjunto de armazéns que podem suprir o consumidor j

A eficiência do enfoque de Efroymson e Ray está baseada na solução imediata do problema de programação linear que resulta da fixaçao do vetor de localizações z. Uma experiência computacional relatada com um problema de 50 armazéns (59 variáveis 0-1) e 200 pontos de consumo, consumiu cerca de 10 minutos de CPU (IBM 7094). O algoritmo pode ser estendido para funções custo lineares por partes. Spielberg {88} discute o mesmo problema e sugere melhorias para aumentar a eficiência computacional do algoritmo, além de incorporar ao modelo algumas restrições adicionais, como orçamento disponível. Muitos outros algoritmos foram desenvolvidos para o PLA sem restrições de capacidade*, mas o de Khumawala {55} parece ser o melhor ponto de vista de eficiência e flexibilidade.

O chamado PLA capacitado considera que os armazéns têm uma capacidade limitada de armazenamento (ou as fábricas têm uma limitada capacidade de produçao) e vários algoritmos de separação e avaliaçao foram propostos para resolvê-los. Uma possível formulação é

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} k_i z_i$$

sujeito a $\sum_{j \in J} x_{ij} \leqslant S_i z_i$, $i \in I = \{1,2,\ldots,m\}$,

$\sum_{i \in I} x_{ij} = D_j$, $j \in J = \{1,2,\ldots,n\}$

---

* veja Balinsky e Spielberg {4}

$$x_{ij} > 0 \quad , \quad i \varepsilon I \quad , \quad j \varepsilon J$$

$$z_i = 0,1 \quad , \quad i \varepsilon I$$

onde x_{ij} = fluxo de produto entre i e j

z_i = 0 se o armazém i é instalado ; 0 caso contrário

c_{ij} = custo unitário de transporte

D_j = demanda do consumidor j

S_i = capacidade do armazém i

k_i = custo fixo associado de instalação (operação) do armazém i

Dentre os vários algoritmos propostos citam-se os de Davis e Ray {15}, Ellwein e Gray {22}, Ellwein {21}, Sá {82}. Os dois últimos são comparados com o algoritmo desenvolvido por Akinc e Khumawala {1} que se mostrou bem mais eficiente numa série de 12 problemas de dimensões variadas. Nesta mesma de modelos, Geoffrion e McBride {38} desenvolveram um algoritmo capaz de tratar várias restrições adicionais, como limitantes inferiores e superiores na capacidade dos armazéns, restrições adicionais sobre as variáveis de fluxo e de localização e podem restringir a satisfação da demanda de um consumidor através de um único armazém. Eles relatam que um problema médio(25 armazéns e 100 consumidores) pode ser resolvido em aproximadamente 1 minuto de CPU (IBM 360/91).

4.3 - ENFOQUE DE PROGRAMAÇÃO MISTA E DECOMPOSIÇÃO

Um PLA pode ser encarado como um problema de programação mista - MIP - (contém variáveis reais e inteiras). O desenvolvimento de técnicas eficientes em programação inteira, em conjunto com o aparecimento da técnica de separação e avaliação, criou condições de se desenvolverem sistemas de programação mista de uso geral. Dentro,então,de certas limitação um PLA pode ser solucionado com esses pacotes comerciais de MIP. Os de uso geral mais conhecidos são o UMPIRE da UNIVAC, o MPSX-MIP para os 360 a 370 da IBM e Ophelie Mixed da CDC. Todos eles usam algoritmos de separação e avaliação.Esses sistemas permitem tratar de maneira ótima versões bastante sofisticadas do PLA, como funções custo linear por partes, restrições sobre capacidade e outras restrições sobre variáveis reais e inteiras, permitindo ainda muita flexibilidade na tratamento do problema. A mais séria limitação no uso desses pacotes se encontra no tamanho possível dos problemas tratados e na eficiência computacional {36}. No caso do tempo de máquina disponível ser um fator limitado e desde que os erros de cálculo acumulados não comprometam o resultado, esses pacotes se destinam mais a subotimizações. Além disso, só problemas de pequeno ou médio porte podem ser tratados.

Uma outra categoria de pacotes de otimização é constituída por sistemas especialmente desenvolvidos para os problemas de distribuição e localização. Os sistemas Poligami para o CDC 6600 e Capflo permitem que os modelos incorporem relativa flexibilidade, como, um único produto, dois estágios de distribuição, restrições na capacidade dos armazéns, funções custo com economias de escala (lineares por partes). Poligami trabalha dentro de um enfoque convencional de separação e avaliação que resolve um problema de fluxo em redes pelo método "out-of-kilter" para fazer a avaliação. Como relatado em

Geoffrion {36} o sistema é apropriado a solução de problemas de no máximo 40 variáveis zero-um. Capflo guarda quase as mesmas características.

São raras as publicações que trazem experiência computacional com esses tipos de sistemas. Tentando mostrar a aplicabilidade do sistema Ophelie Mixed, Elson {26} relata que levou em torno de 8 minutos para resolver um problema com 15 fábricas, 3 produtos, 45 armazéns e 50 pontos de consumo.

Decomposição é um outro enfoque divisado para resolver problemas mistos de programação matemática. A idéia intuitiva da decomposição é dividir um problema em vários outros menores e de mais simples solução. Como decorrência óbvia, os métodos de decomposição se mostraram adequados aos problemas grandes, de muitas variáveis e porisso passaram a pertencer ao ferramental de solução dos sistemas de grande porte. No caso dos PLA o enfoque de decomposição se aplica procurando separar a parte inteira da parte real e resolvê-las em separado, com a supervisão de um esquema coordenador. O algoritmo de decomposição de Benders {8} procura realizar isso. Ele não foi muito utilizado de início, para problemas de localização, mas quando os problemas práticos começaram a exigir modelos de grandes dimensões, de muitos produtos e boa flexibilidade, ela ganhou importância.

O algoritmo "linear" de Benders foi desenvolvido para problemas de programação mista onde o PLA é um caso particular, mas ele se aplica a problemas de forma geral

$$\text{minimizar} \quad cx + f(y)$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax + F(y) \geqslant b \quad , \quad x \geqslant 0 \quad , \quad y \in Y$$

onde as variáveis y são "complicantes", no sentido que quando fixadas temporariamente num valor, o problema resultante é um programa linear. Daí o sentido de chamar algoritmo de Benders "linear". No caso do PLA, y são as variáveis zero-um.

Balinsky {3} foi o primeiro a usar a decomposição de Benders num PLA com capacidade ilimitada dos armazéns, mas foi o trabalho de Geoffrion e Graves {39} que consolidou-a como um poderoso método para solução dos PLA, principalmente no caso de vários produtos. Eles relatam extensa experiência computacional no projeto de uma rede de distribuição de alimentos com 14 fábricas, 17 produtos diferentes, 45 locais possíveis de instalação de centros de distribuição, e 121 zonas consumidoras. Em média, a solução do problema levou em torno de 1 minuto de CPU (IBM 360/91). Num trabalho posterior, Geoffrion et al. {37} ampliam o modelo anteriormente usado permitindo maior sofisticação do problema tratado e usando basicamente o mesmo enfoque da decomposição de Benders. Eles relatam que para problemas com 100 produtos, 100 centros de distribuição e 400 zonas de demanda, um computador de grande porte não leva mais que 15 minutos de CPU, com critérios de tolerância em torno de 1%.

5. OUTROS PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO

5.1 - PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO ESTOCÁSTICO

O problema de localização estocástico (PLE) é uma extensão natural dos PLA e ele aparece quando o conhecimento sobre algum parâmetro não é completo. Supondo porém que tais incertezas seguem uma lei conhecida(distribuição de probabilidades), a resolução do problema deve apelar para o campo da programação estocástica. A idéia fundamental é formular um problema equivalen te determinístico e a partir daí olhar o PLE como um simples problema de localização. Como acontece geralmente, a inclusão de considerações estocásticas dificultam a solução dos problemas, e no caso considerado, o equivalente obtido cai no campo da programação mista não-linear.

O PLE pode ser descrito como saber definir locais ótimos para a instalação de "facilidades" (fábricas, armazéns, edifícios, etc) dentre um conjunto finito de locais condidatos, de modo a satisfazer as demandas aleatórias de um conjunto de pontos consumidores procurando minimizar os custos de instalação(e produção) e de transporte envolvidos.

Alguns trabalhos já foram publicados tendo o PLE como objetivo. Leblanc {61} apresenta um método heurístico de resolução do PLE dentro de uma formulação clássica considerando as demandas aleatórias. O ótimo do problema não é garantido nesse caso e a eficácia da heurística proposta não é possível de ser avaliada devida à carência de aplicações práticas, principalmente considerando problemas de grande porte. Usando o enfoque de separação e avaliação, Balachandran e Jain {2} formularam um PLE mais geral, considerando as demandas aleatórias e funções de custo descontínuas. O algoritmo proposto generaliza, para o caso estocástico, uma técnica de parametrização para problemas lineares ("operator theory"), mas não traz experiência computacional que valide o procedimento iterativo.

O PLE é tratado de maneira ótima em França {30} através da decomposição de Benders generalizada. O esquema de decomposição usado é semelhante ao de Benders linear, onde são separadas as partes inteiras e real do problema de localização. No caso estocástico, a parte real é um sub-problema não-linear de transportes. Experiências computacionais em diversos exemplos confirmaram a eficiência do esquema de decomposição para o caso estocástico, já observado no caso determinístico.

Vale ainda ressaltar o trabalho de Jucker e Carlson {52}, mas cuja formulação não usual, com considerações multi-critério, não permite enquadrá-lo aqui.

5.2 - MODELOS COM CENTROS INTERMEDIÁRIOS (2 ESTÁGIOS) E VÁRIOS PRODUTOS

Até agora todos os modelos de PLA estudados eram de um único estágio (fábrica-consumidor ou armazém-consumidor) e um único produto. Porém, sistemas de distribuição mais complexos frequentemente têm necessidade de considerar dois estágios na distribuição e também trabalham com diferentes produtos. Esses modelos mais elaborados, geralmente não podem ser resolvidos pelos algoritmos simples relatados anteriormente. Ao nível das técnicas, as que encontram mais sucesso nestes casos são a programação mista e decomposição.

Uma possível formulação de um problema de dois estágios e um único produto é

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk} x_{jk} + \sum_{j \in J} k_j z_j$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j \in J} x_{ij} \leqslant S_i \quad ; \quad i \in I = \{1,2,\ldots,m\}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = \sum_{k \in K} x_{jk} \quad , \quad j \in J = \{1,2,\ldots,n\}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leqslant C_j z_j \quad , \quad j \in J$$

$$\underline{D}_k \leqslant \sum_{j \in J} x_{jk} \leqslant \overline{D}_k \quad , \quad k \in K = \{1,2,\ldots,p\}$$

$$x_{ij} \, , \, x_{jk} \geqslant 0 \quad , \quad i \in I \, , \, j \in J \, , \, k \in K$$

$$y_j = 0,1 \quad , \quad j \in J$$

onde x_{ij} = fluxo do produto entre fábrica i e armazém j

x_{jk} = fluxo do produto entre armazém j e ponto de consumo k

z_j = 1 se o armazém j está aberto ; 0 caso contrário

$c_{ij} = c'_{ij} + T_i + V_j$ = custo unitário para transferir o produto de i para j

c'_{ij} = custo unitário de transporte de i para j

T_i = custo variável unitário de produção da fábrica i

V_j = custo variável unitário por usar o armazém j

$c_{jk} = c'_{jk} + R_k$ = custo unitário para transferir o produto de j para k

c'_{jk} = custo unitário de transporte entre j e k

R_k = custo variável unitário por usar o ponto de consumo k

k_j = custo fixo de operação do armazém j

S_i = quantidade de produto fabricado em i

$\underline{D}_k$ = limitante inferior da quantidade demandada em k

C_j = capacidade do armazém j

$\overline{D}_k$ = limitante superior da quantidade demandada em k

Marks {68} aplicou um procedimento de separação e avaliaçao convencional para o modelo acima, onde a função objetivo com custo fixo(fixed charge) é substituída por uma função substimadora linear. A partir daí o esquema convencional de separação e avaliação é aplicado, com a avaliação sendo feita pela resolução de um problema de transbordo pelo método "out-of-kilter".

Estendendo os modelos de dois estágios para vários produtos, encontram-se os artigos de Elson {26} e Geoffrion o Graves {39}. O primeiro considera um modelo parecido com o descrito acima, mas incorpora além de varios produtos, a possibilidade de construir-se novos armazéns ou aumentar a capacidade dos já construídos. Ele usa o pacote MIP da CDC, o Ophelie Mixed, e relata tempos aceitáveis na solução de problemas de porte médio. O modelo usado por Geoffrion é diferente e lança mão de variáveis de índices quádruplos. O modelo é

$$\underset{x \geqslant 0; y,z=0,1}{\text{minimizar}} \quad \sum_{ijkl} c_{ijkl} \, x_{ijkl} + \sum_k \left[f_k \, z_k + v_k \cdot \sum_{il} D_{il} \cdot y_{kl} \right]$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{kl} x_{ijkl} \leqslant S_{ij} \quad , \quad \text{para todo } ij$$

$$\sum_j x_{ijkl} = D_{il} \cdot y_{kl} \quad , \quad \text{para todo } ikl,$$

$$\sum_k y_{kl} = 1 \quad , \quad \text{para todo } k, \tag{1}$$

$$\underline{V}_k \, z_k \leqslant \sum_{il} D_{il} \cdot y_{kl} \leqslant \overline{V}_k \, z_k \quad , \quad \text{para todo } k \; ,$$

e restrições adicionais lineares sobre y e/ou z, onde

i = índice de produto

j = índice de fábricas

k = índice de possível centro de distribuiçao (armazem)

l = indice de zona de consumo

S_{ij} = capacidade de produção do produto i na fábrica j

D_{il} = demanda pelo produto i na zona de consumo l

$\underline{V}_k, \overline{V}_k$ = mínima e máxima capacidade do centro do local k

f_k = custo fixo de operação e/ou construção do centro k

v_k = custo variável unitário de operação do centro k

c_{ijkl} = custo unitário médio de produzir e transportar o produto i, da fábrica j, através do centro k, até a zona de consumo l

x_{ijkl} = fluxo do produto i, da fábrica j, através do centro k, até a zona de consumo l

y_{kl} = zero-um que será 1 se o centro de distribuição k servir a zona de consumo l, e 0 caso contrário.

z_k = variável zero-um que será 1 se um centro de distribuição for colocado em k e 0 caso contrário

As possíveis restrições adicionais sobre z e y dão flexibilidade ao modelo no sentido de incorporarem, por exemplo, número máximo ou mínimo de centros funcionando, especificação de qual subconjunto de centros que devem permanecer aberto ou fechados, restrições adicionais de capacidade conjunta de vários centros que lidam com mesmo produto, etc.

O enfoque de decomposição de Benders aplicado por Geoffrion e Graves ao problema acima separa a sua resolução em duas partes, uma resolvendo um problema só em variáveis zero-um e outra resolvendo uma série de problemas simples de transporte, um para cada produto i. Como já dito na seção anterior, a aplicação de decomposição em problemas de grandes dimensões foi bem sucedida, com esforços computacionais bastante aceitáveis. Além disso, uma vantagem desse enfoque é permitir um modelamento bastante complexo*, além de permitir, devido ao método de decomposição empregado, interpretações econômicas que enriquecem a análise da solução do problema {64},{65}.

5.3 - PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DINÂMICO

Nos problemas até agora estudados, as decisões de localização eram fei

* em {37} é descrito um outro modelo mais complexo que o anterior.

tas procurando satisfazer uma demanda agregada de produto, por exemplo, a demanda anual. Porém, quando a demanda (ou produção) é altamente sazonal, o erro que se comete com a agregação pode ser grande. Nestes casos, as melhores decisões de localização devem variar ao longo do tempo, se alterando de maneira ótima para acompanhar as variações ocorridas na demanda e/ou produção.

Classicamente, o artifício matemático que extende os problemas de distribuição para o caso dinâmico consiste em repetir o número de fontes e destinos tantos quantos os períodos de tempos considerados relevantes. Os arcos de transporte só devem ligar uma fonte aos destinos situados depois no tempo. No caso geral, do PLA, esse artifício aumenta consideravelmente as dimensões do problema, podendo comprometer sua solução. Sweney e Thatan {89} desenvolveram, porém, um algoritmo dinâmico para o PLA com centros intermediários (demanda sazonal), que evita a maneira clássica apresentada. Basicamente, eles calculam para cada instante de tempo uma série de configurações de localização com valores crescentes de custo. Como é imputado um custo para se mudar o estado de um armazém (fechar-abrir ou abrir-fechar), eles provam que há uma trajetória ótima de configurações no tempo. A configuração ótima e as sub-ótimas de um instante de tempo são calculadas pelo algoritmo de decomposição de Benders e a trajetória posterior calcula-se aplicando programação dinâmica.

Outro trabalho que apresenta uma solução do PLA para o caso dinâmico é o de Warszawski {92}. Ele sugere três algoritmos diferentes e aplica-os ao caso de localizar usinas produtoras de concreto numa obra civil.

5.4 - EXTENSÃO PARA FUNÇÕES CUSTO NÃO-LINEARES

Até agora só foram consideradas funções custo onde os custos de transporte e/ou de produção aumentam linearmente com a quantidade transportada ou produzida, como mostra a Fig. 2. Em muitos casos reais estas suposições tornam o modelo pouco adequado ao problema que se deseja resolver; por exemplo, quando se consideram que o aumento no tamanho de uma unidade produtora ou da capacidade de um armazém proporcionam economias de escala. De modo geral os custos unitários de produção tendem a diminuir à medida que aumenta o nível da atividade econômica, como mostra a Fig. 3.

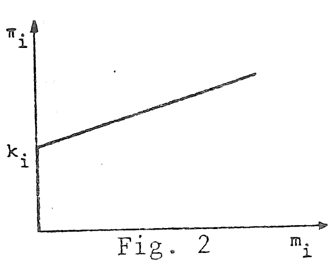

Fig. 2

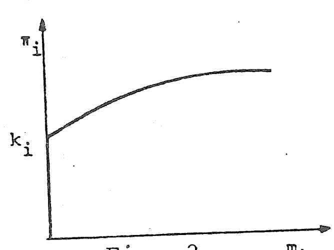

Fig. 3

π_i - custo de produção da unidade i

m_i - volume produzido na unidade i

k_i - custo fixo da unidade i

Por outro lado, em relação aos custos de transporte também podem ocorrer custos marginais decrescentes para maiores quantidades transportadas. Analogamente então, pode-se admitir custos de transporte lineares (Fig. 4) ou côncavos (Fig. 5).

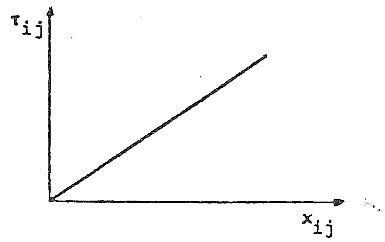

Fig. 4

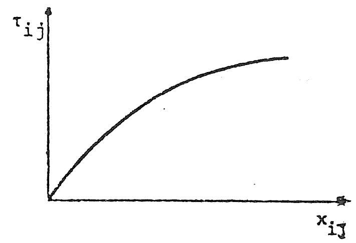

Fig. 5

τ_{ij} = custo de transporte entre i e j

x_{ij} = fluxo entre i e j

Genericamente a função objetiva de um problema de localização pode ser escrita como

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in I} \pi_i(m_i) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \tau_{ij}(x_{ij})$$

$I = \{1,2,\ldots,m\}$

$J = \{1,2,\ldots,n\}$

Os trabalhos de Efroymson e Ray {19}, Spielberg {88}, Khumawala {55}, Davis e Ray {15}, Ellwein {21}, Gray {42}, Akinc e Khumawala {1} e Marks {68}, entre outros, assumem que $\tau_{ij}(x_{ij})$ é linear e $\pi_i(m_i)$ da forma abaixo ("fixed charge").

$$\pi_i(m_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } m_i = 0 \\ k_i + \lambda_i m_i \quad \text{se} \quad m_i > 0 \end{cases}$$

Porém, vários dos autores acima sugerem modificações em seus algoritmos de separação e avaliação de modo a comportarem funções custo lineares por partes. Entretanto, há trabalhos que desenvolvem dispositivos específicos para tratarem funções que não sejam lineares. Dentro desta ótica pode-se citar o trabalho de Klein e Klimpel {56} que supõem os custos de produção da forma da Fig.6 e sugerem um algoritmo de programação não-linear baseado no método de Rosen. Num estudo para localização de departamentos hospitalares, Elshafei {23} também considera custos do tipo da Fig.6 e aplica um método de partição para chegar a solução do problema. Marks e Liebman {69} consideram custos da forma da Fig.7 para problemas de localização com centros intermediários.

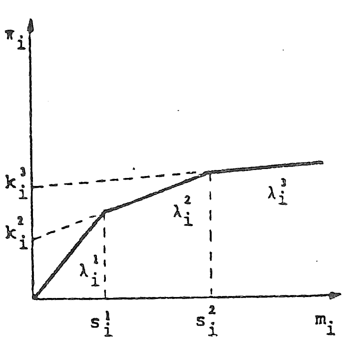

Fig. 6

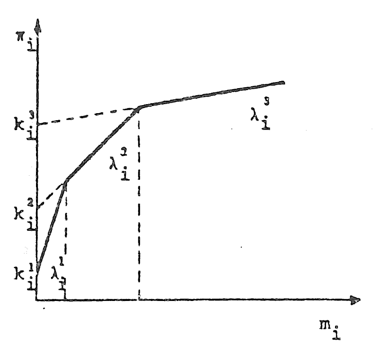

Fig. 7

O artigo de Rech e Barton {79} pode somente que as funções π_i e τ_{ij} sejam lineares por parte, não exigindo continuidade e utiliza envelopes convexos lineares por partes para subestimar as funções. Daí, resolvem uma sequência finita de problemas de fluxo de custo mínimo pelo algoritmo "out-of-kilter" com a qual chegam a solução do problema original.

Sá {82} desenvolveu um algoritmo de separação e avaliação que permite que os custos de produção sejam côncavos e contínuos, como mostra a Fig. 3, sendo os custos de transporte lineares. Sua experiência computacional relata que o método se aplica até com 25 origens (variáveis inteiras), com aproximadamente 15 minutos de CPU para achar a solução ótima. O trabalho de Soland {86} admite que os custos de transporte e/ou produção sejam igualmente côncavos e seu algoritmo também de separação e avaliação caminha para a solução ótima resolvendo uma série de problemas de transporte comuns obtidos através de subestimações lineares de π_i e τ_{ij}. Supondo como Sá, custos côncavos para produção e lineares para transporte, Feldman, Lehrer e Ray {28} desenvolveram uma heurística para achar boas soluções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

{1} - AKINC,U. e KHUMAWALA,B.M., "An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem", Management Science, Vol.23, nº 6, 585-594 (1977).

{2} - BALACHANDRAN,V. e JAIN,S.,"Optimal Facility Location under Randon Demand with Geral Cost Structure", Naval Res.Log. Quartely 23,421-435 (1976).

{3} - BALINSKY,M.L., "On Finding Integer Solutions to Linear Programs", Mathematica, Princeton, N.J. (1964).

{4} - ________ e SPIELBERG,K., "Methods for Integer Programming: Algebraic, Combinatorial and Enumerative", in J.S. Aronofsky (ed.),Progress in Operations Research, Vol.III, Wiley, N.Y. (1969).

{5} - BAUMOL,W.J. e WOLFE,P., "A Warehouse Location Problem", Operations Research 6, 252-263 (1958).

{6} - BEATTIE,D.W., "Improving the Structure of a Distribution System", Operational Research Quartely, Vol.24, 3, 353-364 (1973).

{7} - BELLMAN,E., "An Application of Dymanic Programming to Location-Allocation Problems", SIAM Review 7, 126-128 (1965).

{8} - BENDERS,J.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerishe Mathematik, 4, 238-252 (1962).

{9} - BUZBY,B.R., "Nonlinear Distribution Problems", private communication (1965).

{10} - BRUSTALL,R.M.; LEAVER,R.A. e SUSSANS,J.E., "Evaluation of transport costs for alternative factory sites - a case study", Operational Research Quartely 13, 345-354 (1962).

{11} - CABOT,A.V.; FRANCIS,R.L. e STARY,M.A., "A Network Flow Solution to a Rectilinear Distance Facility Location Problem", AIIE Transactions 2, 132-141 (1970).

{12} - CHRISTOFIDES,N. e VIOLA,P, "The Optimum Location of Multi-Centres on a Graph", Operational Research Quart. 22, 145-154 (1971).

{13} - COOPER,L., "Location - Allocation Problems", Operations Research 11, 331-343 (1963).

{14} - ______. "A Randon Locational Equilibrium Problem", Journal of Regional Science, 14, 47-54 (1974).

{15} - DAVIS,P.S. e RAY,T.L., "A Branch-Bound Algorithm for the Capacitated Facilities Location Problem", Naval Res.Log.Quartely 16, 331-344 (1969).

{16} - DEARING,D.M. e FRANCIS,R.L., "A Minimax Location Problem on a Network", Transportation Science 8, 333-343 (1974).

{17} - __________ e __________ , "A Network Flow Solution to a Multi-facility Location Problem Using Rectilinear Distances", Transportation Science 8, 126-141 (1974).

{18} - DREZNER,Z. e WESOLOWSKY,G.O., "Facility Location on a Sphere", J.Op. Res. Soc. 29, nº 10, 997-1004 (1978).

{19} - EFROYMSON,N.A. e Ray,T.L., "A Branch-Bound Algorithm for Plant Location", Operations Research 14, 361-368 (1966).

{20} - EILON,S.; WATSON-GANDY,C.D.T. e CHRISTOFIDES,N., "Distribution Management: Mathematical Modelling & Practical Analysis", Griffin , London (1971).

{21} - ELLWEIN,L.B., "Fixed Charge Location-Allocation Problems with Capacity and Configuration Constraints", Technical Rep. nº 70-2, Department of Ind. Engineering, Stanford University (1970).

{22} - __________ e GRAY,F., "Solving Fixed Charge Location-Allocation Problems with Capacity and Configuration Constraints",AIIE Transactions, III, 4, 290-298 (1971).

{23} - ELSHAFEI,A.N., "An Approch to Locational Analysis", Operational Research Quartely, Vol.26, nº 1, 167-181 (1975).

{24} - EL-SHAIEB,A.M., "The Single Source Weber Problem-Survey and Extensions", J. Opl. Res. Soc.,Vol. 29, nº 5, 469-476 (1978).

{25} - ____________, "A New Algorithm for Locating Sources Among Destinations", Management Science 20, 221-231 (1973).

{26} - ELSON,D.G., "Site Location via Mixed-Integer Programming", Operational Research Quartely, 23, nº 1, 31-43 (1972).

{27} - ELZINGA,J.; HEARN,D. e RANDOLPH,W.D., "Minimax Multi-facility Location with Euclidian Distances", Transportation Science 10, 321--336 (1976).

{28} - FELDMAN,E.; LEHRER,F. e RAY,T., "Warehouse Location Under Continuous Economies of Scale", Management Science, Vol.12, p.670 (1966).

{29} - FRANÇA,P.M., "Problemas de Localização: Solução por Decomposição", Tese de Doutorado, UNICAMP, 1979.

{30} - FRANÇA,P.M., "Stochastic Transportation-Location Problems by Generalized Benders Decomposition", submetido à Transp. Science.

{31} - FRANCIS,R.L. e GOLDSTEIN,J.M., "Location Theory: A Selective Bibliography", Operations Research 22, 400-410 (1974).

{32} - FRANK,H., "A Note on a Graph Theoretic Game of Hakimi's", Operations Research 15, 567-570 (1967).

{33} - GALVÃO,R.D., "The Optimal Location of Facilities on a Ntework", Ph.D. Thesis, Imperial College, London (1977).

{34} - GARFINKEL,R.S.; NEEBE,A.W. e RAO,M.R., "The m-Center Problem:Minimax Facility Location", Management Science 23, 1133-1142 (1977).

{35} - ____________, NEEBE,A.W. e RAO,M.R., "An Algorithm for the m-Median Plant Location Problem", Transportation Science 8, 217-236(1974).

{36} - GEOFFRION,A.M., "A Guide to Computer-Assisted Methods for Distribution System Planning", Sloan Management Review, Winter 1975, 17--41.

{37} - ____________, GRAVES,G.W. e LEE,S., "Strategic Distribution System Planning: A Status Report", in A. Hax (ed.), Studies in Operations Management, North Holland/Elsivier (1978).

{38} - ____________ e MCBRIDE,R.D., "The Capacited Plant Location Problem with Additional Constraints", Joint National Meeting of AIIE , ORSA and TIMS, Atlantic City, N.J. (1972).

{39} - ____________ e GRAVES,G.W., "Multicommandity Distribution System Design by Benders Decomposition", Management Science, 20, 822-844 (1974).

{40} - GOLDMAN,A.J., "Minimax Location of a Facility in a Network", Transportation Science 6, 407-418 (1972).

{41} - ____________, "Optimum Locations for Centers in Networks", Transportation Science 3, 352-360 (1969).

{42} - GRAY,P., "Exact Solution of the Site Selection Problem by Mixed Integer Programming", in Applications of Mathematical Programming Techniques, E.M.L. Beale (ed.) - Am.Elsivier Publ. Co. New York (1970).

{43} - HAKIMI,S.L., "Optimal Distribution of Switching Centers and Medians of a Graph", Operations Research 12, 450-459 (1964).

{44} - ____________, "Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems", Operations Research 13, 462-475 (1965).

{45} - ____________ e MAHESWARI,S.N., "Optimum Locations of Centers in Networks", Operations Research 20, nº 5, 967-973 (1972).

{46} - ____________; SCHMEICHEL,E.F. e PIERCE,J.G., "On p-Centers in Networks", Transportation Science 12, 1-15 (1979).

{47} - HALFIN,S., "On Finding the Absolute and Vertex Centers of a Tree with Distances", Transportations Science 8, 75-77 (1974).

{48} - HANDLER,G.Y., "Minimax Network Location: Theory and Algorithms" , Tech.Rep. Center, M.I.T. (1974).

{49} - ____________, "Minimax Location of a Facility in a Undirected Tree Graph", Transportation Science 7, 287-293 (1974).

{50} - ____________, "Finding Two-Centers of a Tree: The Continuous Case", Transportation Science 12, nº 2, 93-106 (1978).

{51} - JÄRVINEN,P; RAJALA,J. e SINERVO,H., "A Branch-and-Bound Algorithm for Seeking the p-Median", Operations Research 20, 173-178 (1972).

{52} - JUCKER,J.V. e CARLSON,R.C., "The Simple Plant-Location Problem under Uncertainty", Operations Research, Vol.24, nº 6, 1045-1055(1976).

{53} - JUEL,H. e LOVE,R.F., "An Efficient Computational Procedure for Solving the Multifacility Rectilinear Facilities Location Problem", Operational Research Quartely 27, 697-703 (1976).

{54} - KHUMAWALA,B.M., "An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Warehouse Location Problem", Management Science 18, B718-B731(1972).

{55} - ____________, "An Efficient Branch-and-Bound Algorithm for the Warehouse Location Problem", Management Science 18, B718-B731 (1972).

{56} - KLEIN,M. e KLIMPEL,R.R., "Applications of Linearly Constrained Nonlinear Optimizations to Plant Location and Sizing", J. Indust. Engng. 18, 90 (1967).

{57} - KUEHN,A.A. e HAMBURGER,J.J., "A Heuristic Program for Locating Warehouses", Management Science 9, 643-666 (1963).

{58} - KUHN,H.W. e KUENNE,R.E., "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics", J. Regional Science 4, 21-34 (1962).

{59} - LAWRENCE,R.M. e PENGILLY,P.J., "The Number and Location of Depots Required for Handling Products for Distribution to Retail Stores in South-East England", Operational Research Quartely 20, 23-32 (1969).

{60} - LEA,A.C., "Location-Allocation Systems: An Annotated Bibliography", Discussion Paper mº 13, Department of Geography, University of Toronto, Canada (1973).

{61} - LEBLANC,L.J., "A Heuristic Approach for Large Scale Discrete Stochastic Transportation - Location Problems", Comp. & Maths. with Appls., Vol. 3, 87-94 (1977).

{62} - LEVY,J., "An Extended Theorem for Location on a Network", Operational Research Quartely 18, 433-442 (1967).

{63} - LOVE,R.F.; WESOLOWSKY,G.O. e KRAEMER,S.A., "A Multifacility Minimax Method for Euclidian Distances", Int. J. Prod. Res. 11, 37-45 (1973).

{64} - LUNA,H.P.L., "Les Techeniques de Decomposition-Cordination dans les Modèles Economiques d'Optimisation", Thèse d'Etat, Un.P.Sabatier (1978).

{65} - __________, "Economic Interpretation of the Benders Decomposition Technique Applied to Location Problems", 2nd. Int.Conf.Dyn.Model Control of Nat. Economies, IFAC/IFORS/IIASA, Wien (1977).

{66} - MANNE,A.S., "Plant Location under Economies of Scale Decentralization and Computation", Management Science 11, 213-235 (1964).

{67} - MARANZANA,F.E., "On the Location of Supply Points to Minimize Transport Costs", Oeprational Research Quartely 15, 261-270 (1964).

{68} - MARKS,D.H., "Facility Location and Routing Models in Solid Waste Collection Systems", Ph.D. Thesis, The Johns Hopkins Univ. (1969).

{69} - ________ and LIEBMAN,J.C., "Mathematical Analysis of Solid Waste Collection", Report (SW-5 rg), V.S. Dept. of H.E.W., Washington - DC (1970).

{70} - MARSTEN,R.E., "An Algorithm for Finding Almost All of the Medians of a Network", Discussion Paper nº 23, Northwestern University(1972).

{71} - MCGINNIS,L.F., "A Survey of Recent Results for a Class of Facilities Location Problems", AIIE Transactions, Vol. 9, nº 1, 11-18 (1977).

{72} - ________ e WHITE,J.A., "A Single Facility Rectilinear Location Problem with Multiple Criteria", Transportation Science 12, nº 3, 217-231 (1978).

{73} - MINIEKA,E., "The m-Center Problem", SIAM Review 12, 138-139 (1970).

{74} - MONTEROSSO,C.D.B., "Um Método Heurístico para a Localização e Dimensionamento de Armazéns em Sistemas de Grande Porte Considerando Economias de Escala", Tese de Mestrado - COPPE, UFRJ (1977).

{75} - MORRIS,J.G., "A Linear Programming Approach of the Solution of Constrained Multi-Facility Minimax Location Problems where Distances are Rectangular", Operational Research Quartely 24, 419-439(1973).

{76} - OSTRESH,L.M.,Jr., "Convergence and Descent in the Fermat Location Problem", Transportation Science 12, nº 2, 153-164 (1978).

{77} - PRITSKER,A.B. e GHARE,P.M., "Locating New Facilities with Respect to Existing Facilities", AIIE Transactions 2, 290-297 (1970).

{78} - RAND,G.K., "Methodological Choises in Depot Location Studies", Operational Research Quartely, Vol. 27, 1, 241-249 (1976).

{79} - RECH,P. e BARTON,L.G., "A Non-Convex Transportation Algorithm", in Applications of Mathematical Programming Techniques, E.M.L.Beale (ed.), Am. Elsivier Publ. Co., New York (1970).

{80} - REVELLE,C.; MARKS,D. e LIEBMAN,J.C., "An Analysis of Private and Public Sector Location Models", Management Science 16, nº 11, 692-707 (1970).

{81} - ________ e SWAIN,R.W., "Central Facilities Location", Geogr. Anal., Vol. 2, 30-42 (1970).

{82} - SÁ,G., "Branch-and-Bound and Approximate Solutions to the Capacited Plant-Location Problem", Operations Research 17, 1005-1016(1969).

{83} - SCOTT,A.J., "Location - Allocation Systems: A Review", Geograph.Anal. 2, 95-119 (1970).

{84} - SEPALLA,Y., "On a Stochastic Multi-Facility Location Problem", AIIE Transactions, Vol.7, nº 1, 56-62 (1975).

{85} - SHERALI,H.D. e SHETTY,C.M., "A Primal Simplex Based Solution Procedure for the Rectilinear Distance Multifacility Location Problem", J. Opl. Res. Soc. 29, nº 4, 373-381 (1978).

{86} - SILVA,R.V. e LINS,M.L., "Localização de Depósitos entre Pontos de Produção e Consumo", IX Simpósio da SOBRAPO, Brasília (1978).

{87} - SOLAND,R.M., "Optimal Facility Location with Concave Costs", Operations Research 22, 373-382 (1974).

{88} - SPIELBERG,K., "An Algorithm for the Simple Plant Location Problem with Some Side Conditions", Operations Research 17, 85-111 (1969).

{89} - SWENEY,D.J. e TATHAN,R.L., "An Improved Long-Run Model for Multiple Warehousê Location", Management Science 22, 748-758 (1976).

{90} - TEITZ,M.B. e BART,P., "Heuristic Method for Estimating the Generalized Vertex Median of a Graph", Operations Research 16, 955-961 (1968).

{91} - TOREGAS,C.; SWAIN,R.; REVELLE,C. e BERGMAN,L., "The Location of Emergency Service Facilities", Operations Research 19, 1363-1373(1971).

{92} - WARSZAWSKY,A., "Multi-dimensional Location Problems", Operational Research Quartely 24, nº 2, 165-179 (1973).

{93} - WATSON-GANDY,C.D. e EILON,S.; "The Depot Siting Problem with Discontinuous Delinery Cost", Operational Research Quartely 23,277(1972).

{94} - WEBER,A., "Uber den Standort des Industrien", Tübingen (1909), traduzido para o inglês como "Alfred Weber's Theory of the Location of Industries" for Friedrich,C.J., University of Chicago Press (1929).

{95} - WEISZFELD,E., "Sur le Point Pour Lequel la Somme des Distances de n Points Donnés est Minimum", Tôhoku Math. J. 43, 355-386 (1937).

{96} - WENDELL,R.E. e HURTER,A.P.,Jr., "Optimum Locations on a Nerwork",Transportation Science 7, 19-33 (1973).

{97} - WESOLOWSKY,G.O., "Rectangular Distance Location under the Minimax Optimality Criterion", Transportation Science 6, 103-113 (1972).

{98} - ____________ e LOVE,R.F., "The Optimal Location of a New Facilities Using Rectangular Distances", Operations Research 19, 124-130 (1971).